MATRIZ INVERSA III

1) a) Estudia para qué valores de a existe la inversa de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Calcula A^{-1} para a = 2

2) Calcula, si es posible, la inversa de la matriz: $A=\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{pmatrix}$, para los casos en que a = 2 y a = 0.

3) Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m-4 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Hallar el valor de m para el que la matriz A no tiene inversa.

b) Resuelve AX = O para m = 3.

4) Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

a) Halla, si existe, la matriz inversa de AB+C

b) Calcula, si existen, los números reales x e y que verifican: $C\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

SOLUCIONES

1) a) Para que exista la inversa de A el determinante tiene que ser no nulo:

$$A=\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 2a^2+2-(a-2)+a(a-2) = 3a^2-5a+2$$

$$3a^2-5a+2=0 \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} a=1 \\ a=\dfrac{2}{3} \end{matrix} \right. \rightarrow \text{ existe } A^{-1} \text{ siempre que } a\neq 1 \text{ y } a\neq \frac{2}{3}$$

b) Para a = 2, la matriz queda, $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 4$

calculamos la adjunta transpuesta:

$$Adj(A)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

2) $A=\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{pmatrix}$, para a = 2, queda $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -2$

$$Adj(A)=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -8 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -8 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ -2 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

para a = 0, queda $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 0 \rightarrow$ no existe la matriz inversa de A

3) a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m-4 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$ no es inversible si su determinante es nulo, hallémoslo:

$|A| = 1-m+m-4-1-2+2m = 2m-6 = 0 \rightarrow m=3$, para este valor de m $\rightarrow A^{-1}$ no existe.

b) $AX = O \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vamos a resolver este sistema por el método de Gauss: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\left.\begin{matrix} x+y=0 \\ -y+z=0 \end{matrix}\right\}$ SOL: $x=-y;\ z=y \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \end{pmatrix}$

4) $A = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

a) $D = AB + C = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -7 & -5 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = -6 \Rightarrow \exists D^{-1}$, vamos a hallarla:

$Adj(D) = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj(D))^t = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -10 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow D^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$

b) $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x-2y \\ 6x+6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}$

$\left.\begin{matrix} -x-2y=3x \\ 6x+6y=3y \end{matrix}\right\} y \rightarrow \left.\begin{matrix} 4x+2y=0 \\ 6x+3y=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow 2x+y=0 \rightarrow y=-2x$

solución: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \end{pmatrix}$